

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

магістра

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему «Оптимізація параметрів альпіністської мотузки в рамках моделі
нелінійного осцилятора з урахуванням опору повітря»

Виконав: студент(ка) групи МП-62
II курсу (магістерського рівня),
спеціальності 113 Прикладна математика

(шифр і назва напрямку підготовки, спеціальності)

Прикладна математика

(освітньо-професійна програма)

Ільницька А. Ю.

(прізвище та ініціали)

Керівник:

к. ф-м н., доц. Пославський С. О.

(прізвище та ініціали)

Рецензент:

Меняйлов Є. С.

(прізвище та ініціали)

Харків - 2023 рік

Анотація

Ільницька А.Ю. Оптимізація параметрів альпіністської мотузки в рамках моделі нелінійного осцилятора з урахуванням опору повітря.

В роботі було зроблено огляд математичної моделі динаміки падіння вантажу на альпіністській мотузці з урахуванням впливу опору повітря, що включає етап вільного падіння та етап згасаючих коливань. Проаналізовано вплив різних параметрів мотузки на максимальну силу під час падіння вантажу. Проведено порівняльний аналіз максимальної сили інерції та максимальної пружної сили в залежності від різних параметрів системи.

Ilnytska A. Y. Optimization of climbing rope parameters within the framework of a nonlinear oscillator model taking into account air resistance

The study provides a comprehensive overview of the mathematical model governing the dynamics of a load falling on a climbing rope, accounting for the influence of air resistance. The model encompasses both the free-fall and damping oscillation stages. An analysis was conducted to examine the impact of various rope parameters on the maximum force experienced during the descent of the load. Additionally, a comparative analysis was carried out for the maximum inertial force and the maximum elastic force, considering different system parameters.

Зміст

Анотація	2
Зміст.....	3
Вступ	4
1. Математична модель	5
1.1. Опір повітря: фізичні аспекти та чинники впливу.....	5
1.2. Моделювання першого етапу та аналіз впливу опору повітря на початкові умови другого етапу.	7
1.3. Моделювання другого етапу з урахуванням впливу опору повітря.	12
1.4. Визначення параметрів та їх фізичний зміст.....	14
2. Оптимізація параметрів мотузки в попередніх дослідженнях	16
3. Результати та аналіз.....	20
3.1. Порівняльний аналіз графіків із врахуванням та без врахування сили опору повітря.....	20
3.2. Аналіз оптимальних параметрів	23
Висновки	29
Список використаних джерел.....	31
Додатки	32

Вступ

Проблема оптимізації параметрів мотузки при падінні вантажу, який прикріплений до неї, є важливою в галузях, де можливі падіння з висоти, що мають вплив на функціонування обладнання та навантаження. Актуальність цієї проблеми полягає в постійному прагненні до підвищення ефективності та безпеки у випадку падінь, що може виникнути в різних сферах, таких як підймальне обладнання або екстремальні види спорту.

Метою цього дослідження є розробка та оптимізація моделі нелінійного осцилятора з урахуванням опору повітря. Дослідження спрямоване на визначення оптимальних параметрів мотузки, які дозволяють мінімізувати сили, що діють на вантаж. Результати дослідження можуть мати широке застосування в різних областях, де важлива безпека та оптимальне використання засобів.

У контексті даного аналізу ми зосередимо увагу на докладному вивченні ключових аспектів, що визначають динаміку та ефективність системи в умовах нашого дослідження. Зокрема, ми розглянемо вплив сили опору повітря на вантаж, ефекти сили демпфування мотузки та нелінійну залежність сили пружності, враховуючи їхні взаємодії у визначених параметрах експерименту.

Також для більшого розуміння базових принципів осцилятора та його нелінійної поведінки були розглянуті матеріали [1] та [2]. Детальний аналіз вмісту дозволив визначити ключові аспекти функціонування осцилятора та виявити особливості його нелінійної динаміки. Представлені матеріали висвітлюють основні концепції, що лежать в основі роботи осцилятора. Це допомагає не лише у закріпленні базових знань, але й в розвитку глибокого розуміння нелінійних аспектів його роботи, що може бути корисним у подальших дослідженнях та практичних застосуваннях.

1. Математична модель

У даній главі розглядається математична модель, що визначає рух вантажу на альпіністській мотузці. Починаючи з аналізу фізичних аспектів та чинників, які впливають на опір повітря, подається моделювання першого етапу - вільного падіння, і проводиться аналіз його впливу на початкові умови другого етапу. Далі детально вивчається моделювання другого етапу з урахуванням впливу опору повітря, а також визначення параметрів та їх фізичний зміст.

Кожен підрозділ присвячений ретельному вивченню різних аспектів математичної моделі, що є ключовим для розуміння динаміки та оптимізації параметрів альпіністської мотузки.

1.1. Опір повітря: фізичні аспекти та чинники впливу

Опір повітря є важливим фізичним явищем, що виникає при русі об'єкта в атмосфері та визначається комплексом фізичних аспектів та чинників впливу. Це явище виникає через взаємодію між рухомим об'єктом та повітрям, що його оточує. Формування опору повітря обумовлене рядом фізичних аспектів. По-перше, це пов'язано з в'язкістю повітря, що викликає тертя об'єкта з молекулами повітря під час його руху. Також важливим фактором є ступінь обтічності об'єкта, оскільки форма та геометрія суттєво впливають на ступінь опору.

Чинники впливу на опір повітря включають площу поверхні об'єкта, швидкість руху, густину повітря та властивості середовища.

Будемо вважати, що сила опору повітря спрямована проти напрямку руху, і її величина пропорційна густині середовища ρ , характерній площі S (площі міделевого перерізу тіла) і квадрату швидкості V :

$$F = C_F \frac{\rho v^2}{2} S$$

Коефіцієнт аеродинамічного опору C_F є безрозмірною величиною. Він визначається як відношення сили опору до динамічного тиску. Цей коефіцієнт може бути знайдений експериментальним шляхом або обчислений теоретично в залежності від конкретних умов течії та геометрії об'єкта. Сила опору також визначається характером течії рідини або газу, у нашому випадку - газу. Число Рейнольдса визначає взаємодію між силами тиску, в'язкості та інерції в потоці. Це число вказує на тип течії, будь то ламінарна (мале число Рейнольдса) чи турбулентна (велике число Рейнольдса). У повільному ламінарному потоці сила опору зазвичай пропорційна швидкості, тоді як у турбулентному потоці вона залежить від складних факторів, таких як турбулентні вихори та зміни в структурі потоку, найчастіше її вважають пропорційній квадрату швидкості.

Число Рейнольдса (Re) визначається за допомогою наступної формули:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}$$

де:

ρ – густина рідини чи газу,

v – швидкість об'єкта,

d – характерний лінійний розмір в задачі,

μ – коефіцієнт в'язкості рідини чи газу.

Ключові аспекти зв'язку між C_F та Re :

1. Ламінарний потік (Re мале): Коефіцієнт опору пропорційний $\frac{1}{Re}$ вказуючи на слабку залежність від швидкості. Ламінарний потік характеризується плавним рухом рідини.
2. Турбулентний потік (Re велике): У цьому режимі коефіцієнт опору пропорційний $\frac{1}{\sqrt{Re}}$. Турбулентний потік характеризується хаотичним рухом рідини.

1.2. Моделювання першого етапу та аналіз впливу опору повітря на початкові умови другого етапу.

Моделювання руху вантажу на альпіністській мотузці стає більш докладним при врахуванні опору повітря. Опір повітря визначається коефіцієнтом опору повітря та швидкістю руху, і він може впливати на динаміку падіння.

Для математичного опису руху вантажу на альпіністській мотузці наприкінці падіння можна використовувати диференціальне рівняння, що враховує силу ваги, силу пружності мотузки, нелінійні ефекти та опір повітря. Адаптація моделі до конкретних параметрів, таких як коефіцієнти жорсткості та демпфування, забезпечує її реалістичність. Ми зосередимося на розгляді динаміки системи під час падіння без врахування ваги мотузки та сил опору повітря на неї.

Важливим є врахування того, що опір повітря може впливати на траєкторію падіння вантажу та максимальну силу, яку він відчуває під час спуску. Моделювання таких сценаріїв допомагає розуміти взаємодію вантажу з середовищем.

В даному дослідженні розглядається динаміка вантажу, що прикріплений до альпіністської мотузки та розташований на висоті h_0 . Також у цьому контексті враховується вплив опору повітря. Увесь процес розглядається у два етапи, перший – етап вільного падіння, а другий – згасаючі коливання.

Отже, на першому етапі вантаж вільно падає вниз і досягає висоти h_1 , де $h = h_0 - h_1$ визначає висоту, досягнуту при падінні. У даному контексті, значення параметра h є ідентичним з довжиною мотузки L . На цьому етапі вантаж досягає певної початкової швидкості v_0 , важливо відзначити, що цей етап завершується одночасно із початком процесу розтягування мотузки.

Після завершення падіння, оскільки мотузку розглядаємо як в'язкопружне тіло, відбуваються коливання, які можна описати нелінійним осцилятором. Це представляє другий етап в розгляді динаміки системи.

Розглянемо першу фазу. На даній схемі зображено перший етап падіння, де вантаж вільно падає з висоти h_0 та, досягає кінцевої швидкості v_0 і висоти h_1 .

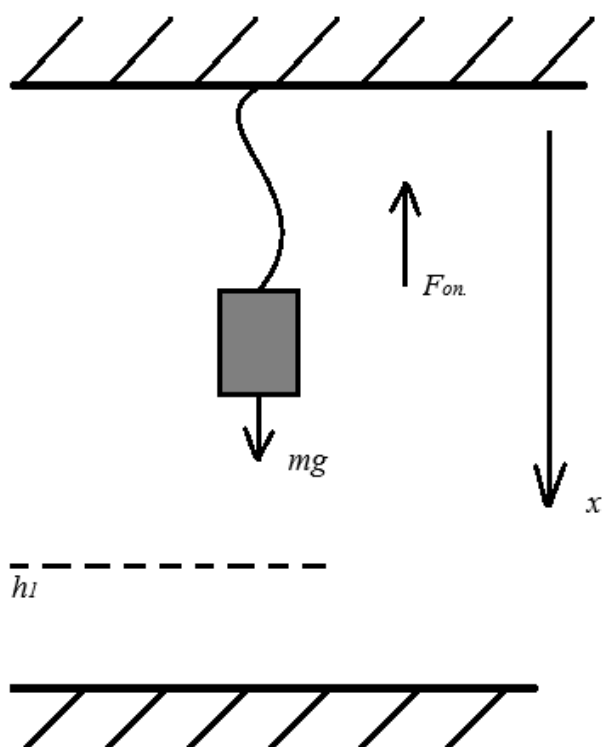


Рис. 1

Розгляд першої схеми має суттєве значення для визначення початкових умов другої фази, що визначають динаміку системи. Першу схему можна використати для аналізу руху вантажу на мотузці на етапі його вільного падіння. Це дає змогу визначити значення початкової швидкості об'єкта для другого етапу, оскільки на відміну від початкового зміщення, швидкість має не нульове значення. Тут координата x залежить від часу t – це переміщення вантажу з часом.

Отже, рівняння для першої схеми за другим законом Ньютона має наступний вигляд:

$$m\ddot{x} + c_2\dot{x}^2 = mg$$

Де $F_{\text{оп. П}} = c_2 \dot{x}^2$ – сила опору повітря що діє на вантаж, $F_T = mg$ – сила тяжіння що діє на вантаж, c_2 – коефіцієнт опору повітря.

Початкові умови $t = 0$:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Зробимо наступну заміну:

$$\dot{x} = u(x), \quad \ddot{x} = uu'$$

Отримаємо:

$$m uu' + c_2 u^2 - mg = 0$$

$$m uu' = mg - c_2 u^2$$

$$m uu' = mg - c_2 u^2$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx}$$

$$m u \frac{du}{dx} = mg - c_2 u^2$$

$$m u du = (mg - c_2 u^2) dx$$

$$\int \frac{u}{mg - c_2 u^2} du = \frac{1}{m} \int dx$$

Розглянемо лівий інтеграл та зробимо наступну заміну:

$$v = c_2 u^2 - mg$$

$$\frac{1}{2c_2} dv = u du$$

Отримаємо:

$$\int \frac{u}{mg - c_2 u^2} du = -\frac{1}{2c_2} \int \frac{1}{v} dv = -\frac{\ln(c_2 u^2 - mg)}{2c_2}$$

Отже, загальне рівняння має вигляд:

$$-\frac{\ln(c_2 u^2 - mg)}{2c_2} = \frac{x}{m} + C$$

Звідси отримаємо вираз для знаходження початкової швидкості через переміщення x :

$$u^2 = \frac{mg + Ce^{-\frac{2c_2x}{m}}}{c_2}$$

Зробимо зворотню заміну та отримаємо:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{mg + Ce^{-\frac{2c_2x}{m}}}{c_2}}$$

Підставимо початкові умови $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$:

$$0 = \sqrt{\frac{mg + C}{c_2}}, \quad C = -mg$$

Звідси отримаємо:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{mg - mge^{-\frac{2c_2x}{m}}}{c_2}} = \sqrt{\frac{mg \left(1 - e^{-\frac{2c_2x}{m}}\right)}{c_2}}$$

Звідси ми можемо знайти значення швидкості коли вантаж досягає висоти h , яка дорівнює довжині мотузки L . Тобто початковими умовами для другого етапу буде

$$x_0 = 0,$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{mg \left(1 - e^{-\frac{2c_2h}{m}}\right)}{c_2}}$$

Отже, мотузка поки що не розтягнута, вона лише випрямлена, але її нижній кінець має початкову швидкість. Для порівняння впливу сили опору повітря ми розглянемо також початкові умови за відсутністю цієї сили.

$$m\ddot{x} = mg$$

$$x_0 = 0,$$

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

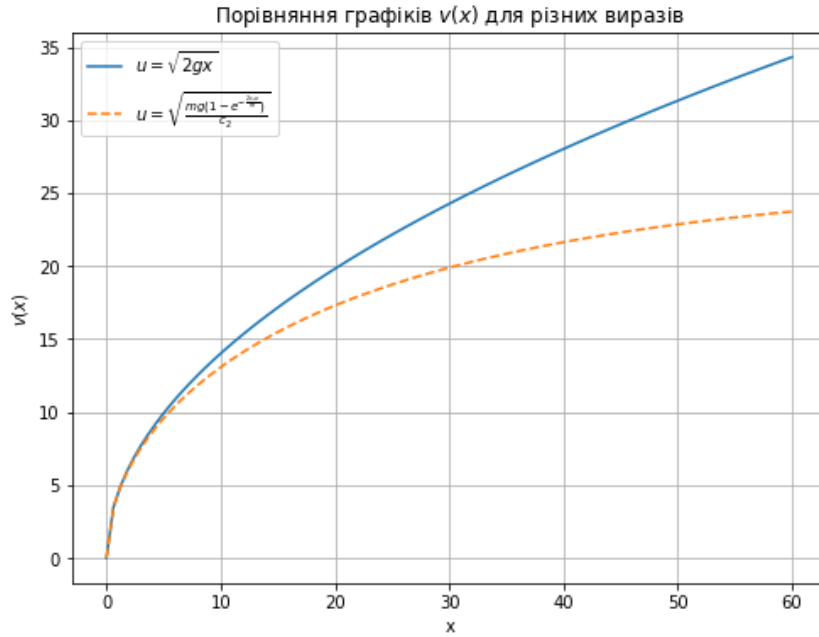


Рис. 2

На поданому графіку можна спостерігати, що збільшення швидкості з урахуванням впливу сили опору повітря відбувається значно повільніше, порівняно з випадком без урахування цієї сили. Отже, можна зробити висновок, що сила опору повітря гальмує рух вантажу. Якщо нашою метою є мінімізація максимальної сили, то зменшення початкової швидкості шляхом впливу сили опору повітря призведе до зменшення сили ривка. Важливо відзначити, що сила опору повітря значною мірою залежить від площі міделевого перерізу тіла, тому логічним є висновок, що зі збільшенням площі зростає сила опору, а це, своєю чергою, призводить до зменшення швидкості та, як наслідок, зменшення сили ривка.

1.3. Моделювання другого етапу з урахуванням впливу опору повітря.

Перейдемо до другої схеми де зображено вантаж у кінці падіння, коли його рух можна описати нелінійним осцилятором з урахуванням сили опору повітря.

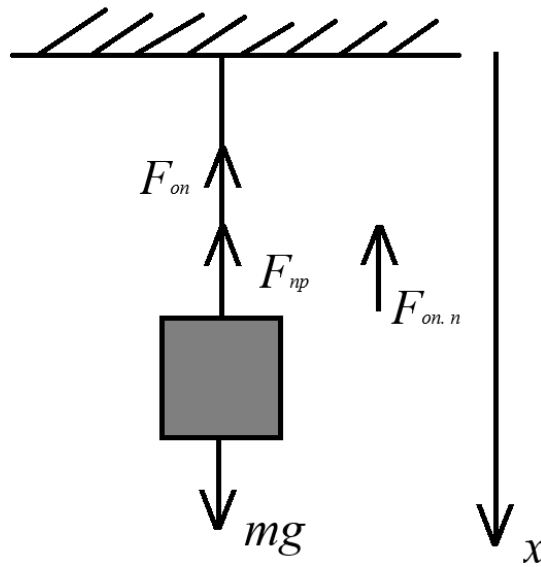


Рис. 3

Зміщення x у цьому випадку це координати точки, наприклад, являє собою міру стиснення або розтягнення мотузки в будь-який момент часу. Отже, маємо за другим законом Ньютона наступне рівняння:

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_2|\dot{x}|\dot{x} + kx + \beta x^3 = mg$$

Це нелінійне диференціальне рівняння другого порядку. Всі коефіцієнти виражаємо в Міжнародній системі одиниць (СІ).

Проведемо перевірку розмірностей:

$$\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} + \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} + \frac{\text{кг}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} + \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot \text{м} + \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Де $F_{\text{оп}} = c_1 \dot{x}$ – сила демпфування, $F_{\text{пр}} = kx + \beta x^3$ – сила пружності, $F_{\text{оп.п}} = c_2 |\dot{x}| \dot{x}$ – сила опору повітря, $F_T = mg$ – сила тяжіння

У даній моделі турбулентний характер течії повітря, тому сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості. Розрахуємо приблизно число Рейнолдса для підтвердження цього факту:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}$$

Дане число розраховується для температури повітря 15 °С.

$$Re = \frac{1,2250 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 20 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 50 \text{ м}}{1,78 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}} \approx 6,88202 \cdot 10^7$$

Як бачимо, це досить велике число, тому сила опору повітря пропорційна саме квадрату швидкості.

Сила пружності - це сила, що виникає внаслідок деформації мотузки. Вона залежить від зміщення об'єкта x , жорсткості пружини k та коефіцієнта нелінійності β .

Сила демпфування - це сила, що залежить від швидкості руху об'єкта \dot{x} і коефіцієнту демпфування c_1 .

Сила опору повітря - це сила, що виникає внаслідок взаємодії об'єкта з повітрям. Залежить від швидкості руху об'єкта \dot{x} і коефіцієнта опору повітря c_2 . Визначається як $F_{\text{оп. п}} = c_2 |\dot{x}| \dot{x}$ для збереження знаку, тому що завжди має напрямок проти вектора швидкості.

Сила тяжіння - це сила, що визначається масою об'єкта m та прискоренням вільного падіння g .

1.4. Визначення параметрів та їх фізичний зміст

Розглянувши модель нелінійного осцилятора з урахуванням опору повітря можна встановити, які параметри впливають на динаміку системи.

Розглянемо наступні параметри, які підлягають оптимізації в рамках розгляду даної моделі:

Коефіцієнт жорсткості k : Цей параметр визначає ступінь жорсткості системи та впливає на частоту та амплітуду коливань. Обчислюється за формулою

$$k = E \frac{S}{l}$$

Тут E – модуль Юнга, S – площа поперечного перерізу, l – довжина. Проте для альпіністських мотузок, що складаються з переплетених менших мотузок, формула відрізняється і має інше визначення.

Оптимізація значення k відображається на кінематичних та динамічних характеристиках системи. Зазвичай коефіцієнт має значення в проміжку між $5000 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ та $10000 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Коефіцієнт демпфування c_1 : Оскільки ми розглядаємо мотузку як в'язкопружне тіло, цей коефіцієнт представляє в'язкість мотузки. Зміна параметра c_1 впливає на величину внутрішнього опору та в'язкості мотузки, що може вплинути на тривалість коливань та загасання системи.

Коефіцієнт β : Параметр β визначає ступінь нелінійності системи. Оптимізація β впливає на форму та амплітуду коливань та дозволяє досягти бажаних динамічних властивостей системи. Коефіцієнт визначається виключно характеристиками та параметрами системи.

Коефіцієнт опору повітря c_2 : Коефіцієнт c_2 відображає ступінь опору повітря. Та виражається формулою:

$$c_2 = C_F \frac{\rho}{2} S$$

У турбулентному режимі течії величина C_F зазвичай знаходиться у діапазоні від 1.5 до 2.5 (для вантажу кубічної форми), $\rho = 1,2250 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ для температури повітря 15 °С. Тобто c_2 знаходиться між $0,9 \cdot S$ та $1,55 \cdot S$.

Оптимізація c_2 дозволяє встановити вплив опору повітря на систему та досягти бажаних динамічних характеристик.

Оптимальні параметри в контексті моделювання альпіністської мотузки вказують на ті значення параметрів системи (наприклад, коефіцієнти демпфування, жорсткості, маси тощо), при яких досягається мінімальна максимальна сила, що діє на вантаж під час падіння із заданої висоти. Ці параметри дозволяють оптимізувати характеристики мотузки для забезпечення максимальної безпеки.

В даному контексті максимальна сила вказує на максимальне значення сили, що діє з боку вантажу на альпіністську мотузку, при певних параметрах системи. Ця сила спостерігається після закінчення етапу вільного падіння та настанням етапу згасальних коливань. Максимальна сила важлива з точки зору безпеки, оскільки вона може впливати на міцність мотузки.

2. Оптимізація параметрів мотузки в попередніх дослідженнях

Мінімізація максимальної сили є важливою задачею, вона полягає в знаходженні оптимальних значень параметрів системи для мінімізації пікової сили. У цьому розділі ми наведемо, проаналізуємо і порівняємо деякі основні викладки з роботи [3] і застосуємо їх для моделювання конкретної задачі.

Розглянемо таку ситуацію:

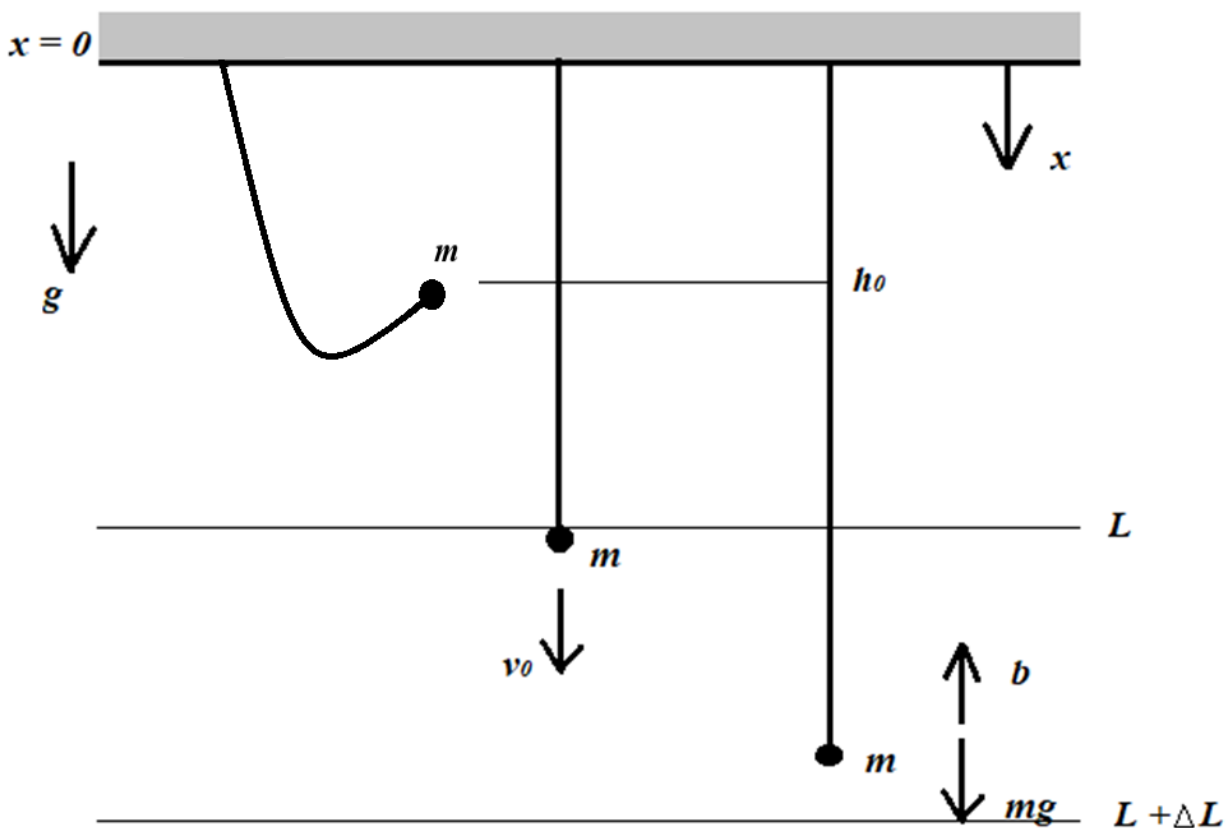


Рис. 4

В даній задачі ми не враховуємо силу опору повітря та силу демпфування. Позначимо через $b(t)$ натяг мотузки в точці $x = L$ в момент часу t , а через $a(x, t)$ прискорення точки x у момент часу t для $x \in [0, L]$ і $t \in \mathbb{R}$. Ми повинні розв'язати проблему мінімізації:

$$\min(\max_{t \geq 0} |b(t)|)$$

Вісь x спрямована за напрямком руху вантажу, тобто вниз.

Ми можемо розглядати задачу мінімізації на обмеженому інтервалі часу $[0, T]$. Очевидно, що натяг $b(t)$ спрямований вгору для всіх $t \in [0, T]$. Іншою силою, що діє на вантаж, є гравітаційна сила mg , спрямована вниз, тобто додатна. Таким чином, підсумкова сила, що діє на вантаж, дорівнює $mg - b(t)$, а за другим законом Ньютона ми маємо:

$$ma(L, t) = mg - b(t)$$

Далі розглянемо ключову нерівність з роботи [3]:

$$\max_{t \in [0, T]} |b(t)| \geq \frac{mg(L + \Delta L - h_0)}{\Delta L}$$

Насправді це прямий наслідок з закону збереження енергії. А саме, як відомо, ми маємо роботу, виконану вантажем в інтервалі часу $[0, T]$ яка дорівнює з одного боку $\int_L^{L+\Delta L} ma(L, t) dx$, а з іншого боку це зміна кінетичної енергії, тобто $-\frac{mv_0^2}{2}$.

Тому отримуємо:

$$\int_L^{L+\Delta L} ma(L, t) dx = -\frac{mv_0^2}{2}$$

Проінтегрувавши рівність по x на інтервалі $[L, L + \Delta L]$, отримаємо:

$$-\int_L^{L+\Delta L} ma(L, t) dx = \int_L^{L+\Delta L} b(t) dx - mg\Delta L$$

Таким чином, враховуючи попередні формули та формулу для початкової швидкості $v_0 = \sqrt{2g(L - h_0)}$, де $(L - h_0)$ – це відстань, яку тіло пододало під час вільного падіння, і визначає довжину падіння, отримуємо:

$$\int_L^{L+\Delta L} b(t) dx = mg\Delta L + \frac{mv_0^2}{2} = mg(L + \Delta L - h_0)$$

Нарешті застосовуємо нерівність:

$$\left| \int_L^{L+\Delta L} b(t) dx \right| \leq \Delta L \max_{t \in [0, T]} |b(t)|$$

$$a(L, t) = \text{const}$$

Прискорення постійне на інтервалі $[0, T]$, це і є той випадок як повинна поводитись математично ідеальна мотузка.

Таким чином у цьому випадку ми отримуємо:

$$a(L, t) = a_0 \equiv \frac{m(h_0 - L)}{\Delta L}$$

$$b(t) = b_0 \equiv \frac{mg(L + \Delta L - h_0)}{\Delta L}$$

Розглянемо також деякі міркування про коефіцієнт ударного навантаження зі статі [4] адаптовані до нашого випадку. Оскільки вантаж рухається вниз при розтягненні мотузки, ми також повинні враховувати додаткову зміну потенційної енергії через розтягнення мотузки. Повна зміна потенційної енергії внаслідок падіння з висоти та розтягненні мотузки буде:

$$mg(L - h_0) + mg\Delta L$$

Отже, звідси отримуємо за законом збереження енергії:

$$mg(L - h_0) + mg\Delta L - \frac{1}{2}k\Delta L^2 = 0$$

$$k\Delta L = mg + mg \sqrt{1 + 2 \frac{k}{mg} (L - h_0)}$$

$$F_{\text{нп}} = k\Delta L, W = mg$$

$$\delta_{st} = \frac{W}{k}$$

$$\frac{F_{\text{нп}}}{W} = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{k(L - h_0)}{mg}}$$

Відношення $\frac{F}{W}$ відоме як коефіцієнт ударного навантаження. Коефіцієнт ударного навантаження (позначається як $\frac{F}{W}$, де F - сила удару, W - вага) визначає відношення сили удару до ваги вантажу або об'єкта під час гальмування або зупинки за допомогою мотузки. Цей коефіцієнт вказує на те, наскільки збільшується сила, що діє на вантаж або точку закріплення мотузки, порівняно з його вагою, під час вільного падіння.

Отже, можна зробити висновок, що максимальна сила залежить від різноманітних умов, таких як довжина мотузки, висота падіння та характеристики самої мотузки.

3. Результати та аналіз

У цьому розділі проведено порівняльний аналіз графіків з урахуванням та без врахування сили опору повітря. Також виконано детальний аналіз оптимальних параметрів системи, що дозволяє з'ясувати ефективність використання альпіністської мотузки для зменшення сил на обладнання та навантаження.

3.1. Порівняльний аналіз графіків із врахуванням та без врахування сили опору повітря

У даному дослідженні проведемо аналіз впливу сили опору на результати розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку.

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_2|\dot{x}|\dot{x} + kx + \beta x^3 = mg$$

Для вирішення цього рівняння використовуватимемо мову програмування Python та бібліотеку `scipy`. Метод `odeint` в бібліотеці `SciPy` за замовчуванням використовує метод "LSODA" (Livermore Solver for Ordinary Differential Equations). Цей метод є адаптивним методом для чисельного розв'язку звичайних диференціальних рівнянь. Цей метод використовує комбінацію методів адаптивного рівняння та методів постійного кроку для надання ефективного та надійного чисельного розв'язку.

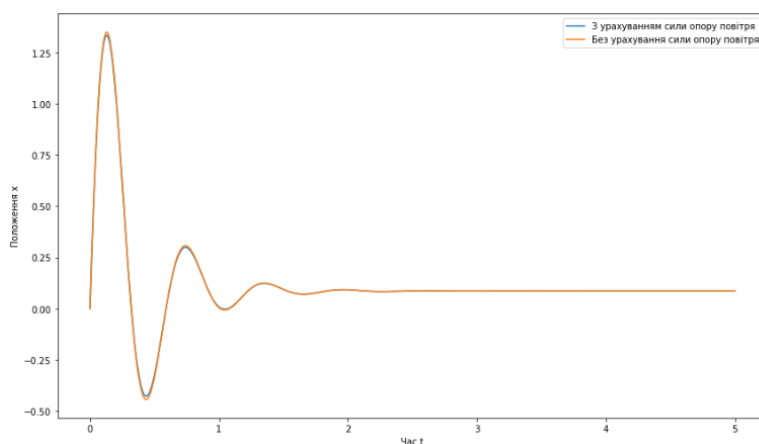


Рис. 5

На представленому графіку відображена залежність координати x від часу t . Видно, що після згасальних коливань вантаж залишається у підвішеному стані на розтягнутій мотузці зі значенням, що дорівнює 0.086 . Максимальне подовження мотузки з урахуванням сили опору виходить меншим аніж без урахування опору.

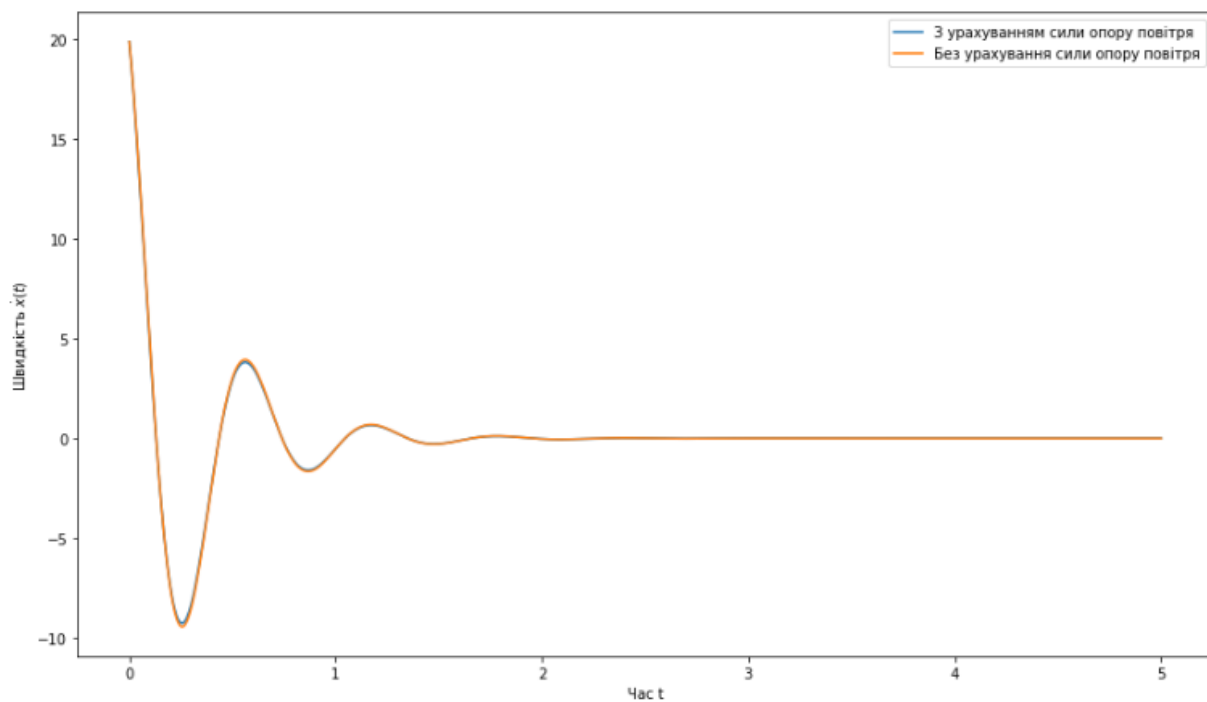


Рис. 6

На поданому графіку представлена залежність швидкості \dot{x} від часу t . Спостерігаються періодичні коливання швидкості, і після моменту $t \approx 2.2$ вона приблизно стає рівною нулю. Цей факт свідчить про те, що вантаж залишається в стаціонарному положенні після зазначеного моменту часу, що може вказувати на стабільність цієї стаціонарної точки.

Порівнюючи значення з урахуванням сили опору, можна відзначити, що швидкість, хоча й незначно, але менша у своєму піковому значенні, ніж без урахування сили опору. Це логічно, оскільки сила опору протидіє зростанню швидкості та гальмує рух вантажу.

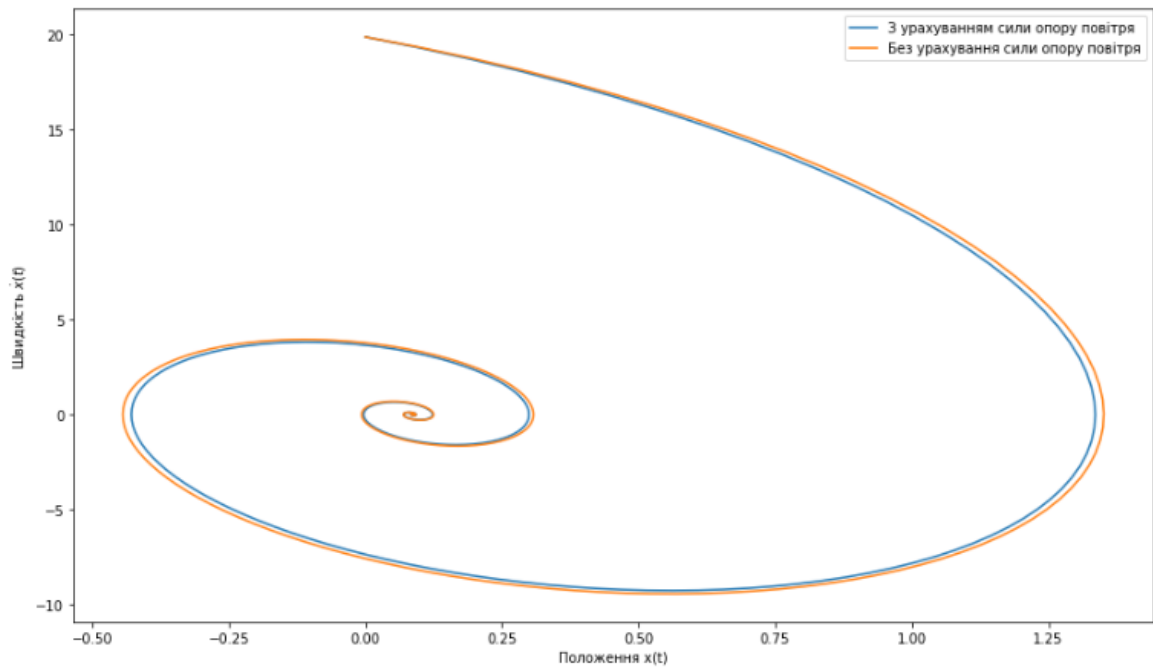


Рис. 7

Тепер розглянемо фазовий портрет системи. Графіки траєкторій у вигляді спіралей, які сходяться до точки $(0.086, 0)$, вказують на згасаючі коливання системи, амплітуда яких зменшується з часом. Така точка є стаціонарною точкою, тобто положенням рівноваги, в якому система може залишатися протягом необмежено довгого часу. У фазовому просторі точка $(0.086, 0)$ є фокусом, фазові траєкторії притягуються до цієї точки. Це свідчить про властивості динаміки системи, де рух починається із заданого стану $(0, v_0)$, але з часом система приходить до стану спокою. Отже, сила опору впливає на динаміку системи, зменшуючи амплітуду коливань та сприяючи поступовому згладжуванню пікових значень у розглянутому контексті.

3.2. Аналіз оптимальних параметрів

У цьому розділі ми розглянемо вплив різних параметрів на систему та їх вплив на значення максимальної сили. Для наочності будуть представлені графіки з багатьма змінними, які відобразять залежність від параметрів.

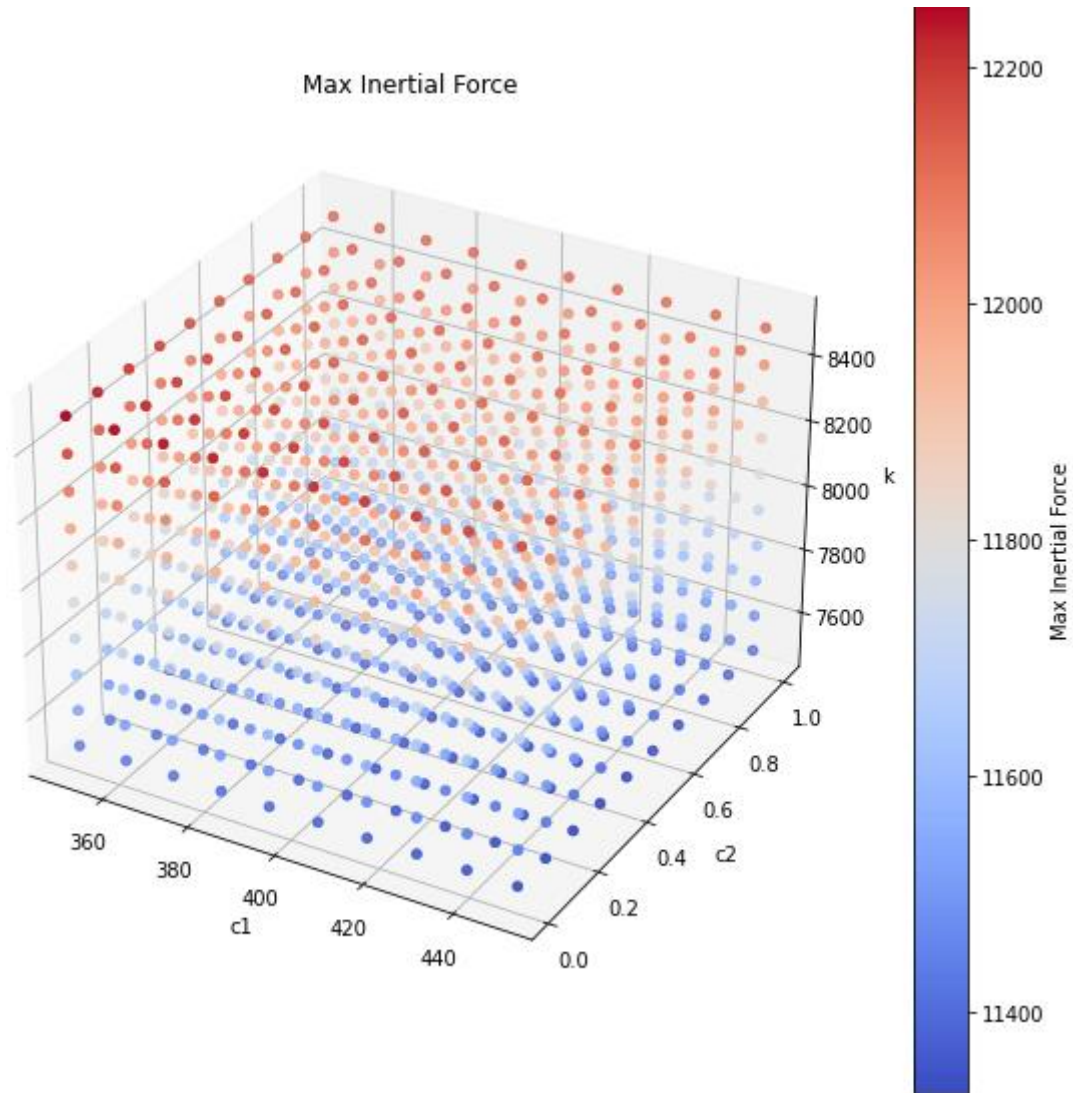


Рис. 8

На даному графіку, що відображає вплив трьох змінних – c_1 , c_2 і k на максимальну силу інерції $m\ddot{x}$, можна визначити, що мінімальні значення максимальної сили інерції спостерігаються при збільшенні коефіцієнта демпфування та коефіцієнта опору повітря, та при зменшенні жорсткості мотузки. Важливо відзначити, що велику роль відіграє заданий проміжок параметрів,

оскільки при різних проміжках залежність може змінюватись. У даному випадку усі коефіцієнти аналогічні характеристикам справжньої мотузки.

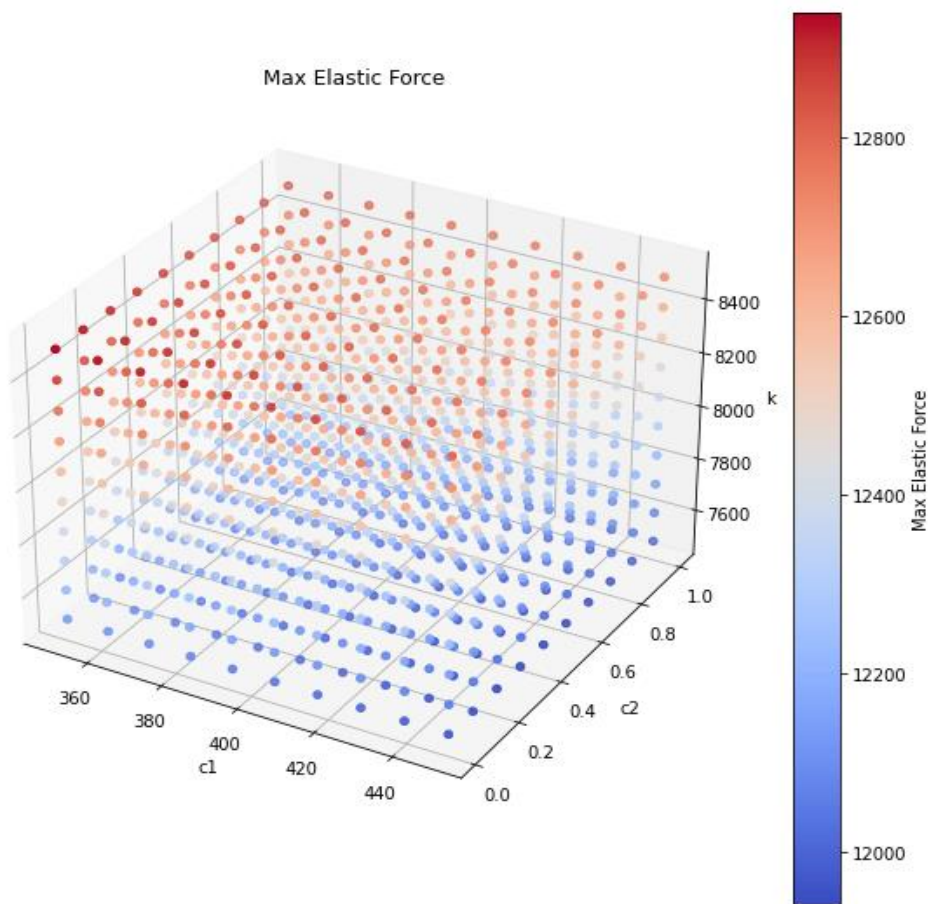


Рис. 9

На цьому графіку зображено залежність максимальної пружної сили від c_1 , c_2 і k . Ситуація аналогічна попередній, але слід відзначити той факт, що значення загальної сили на попередньому графіку менше, ніж значення пружної сили на цьому графіку. Це пояснюється врахуванням сили опору повітря, яка зменшує загальну силу в даному випадку.

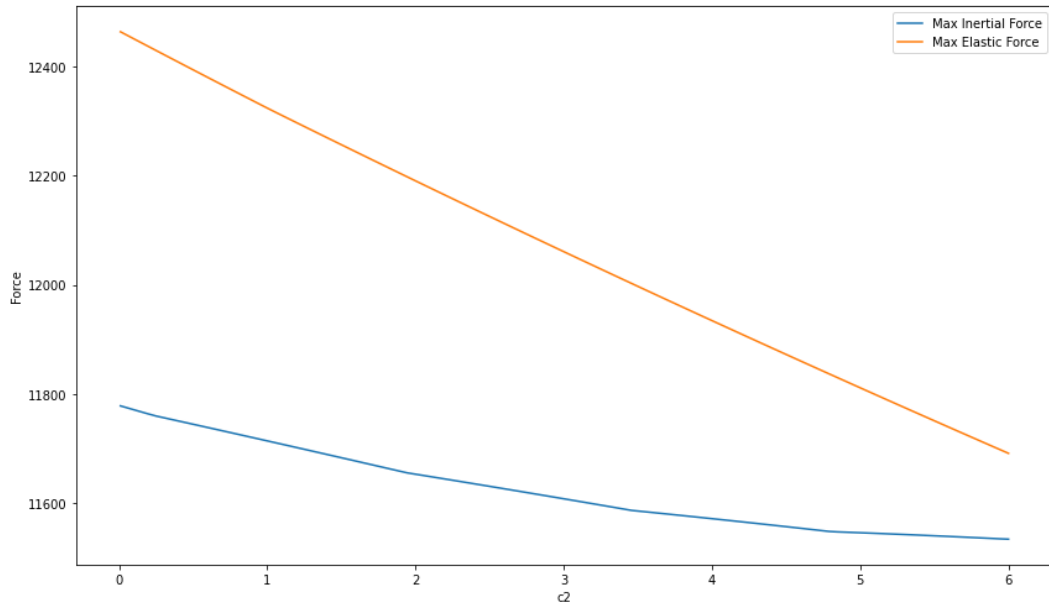


Рис. 10

Також розглянемо графіки залежності максимальної сили інерції та максимальної пружної сили від коефіцієнта опору повітря c_2 . З графіку видно, що зі збільшенням коефіцієнта опору повітря, тобто зі збільшенням сили опору, максимальна пружна сила постійно лінійно зменшується. В той час як максимальна сила інерції має схожу на квадратичну залежність.

Отже, можемо зробити висновок, що сила опору повітря впливає на значення максимальних сил, а саме зменшує їх. Також варто зауважити що сила опору повітря зменшує початкову швидкість вантажу, що теж впливає на значення максимальних сил.

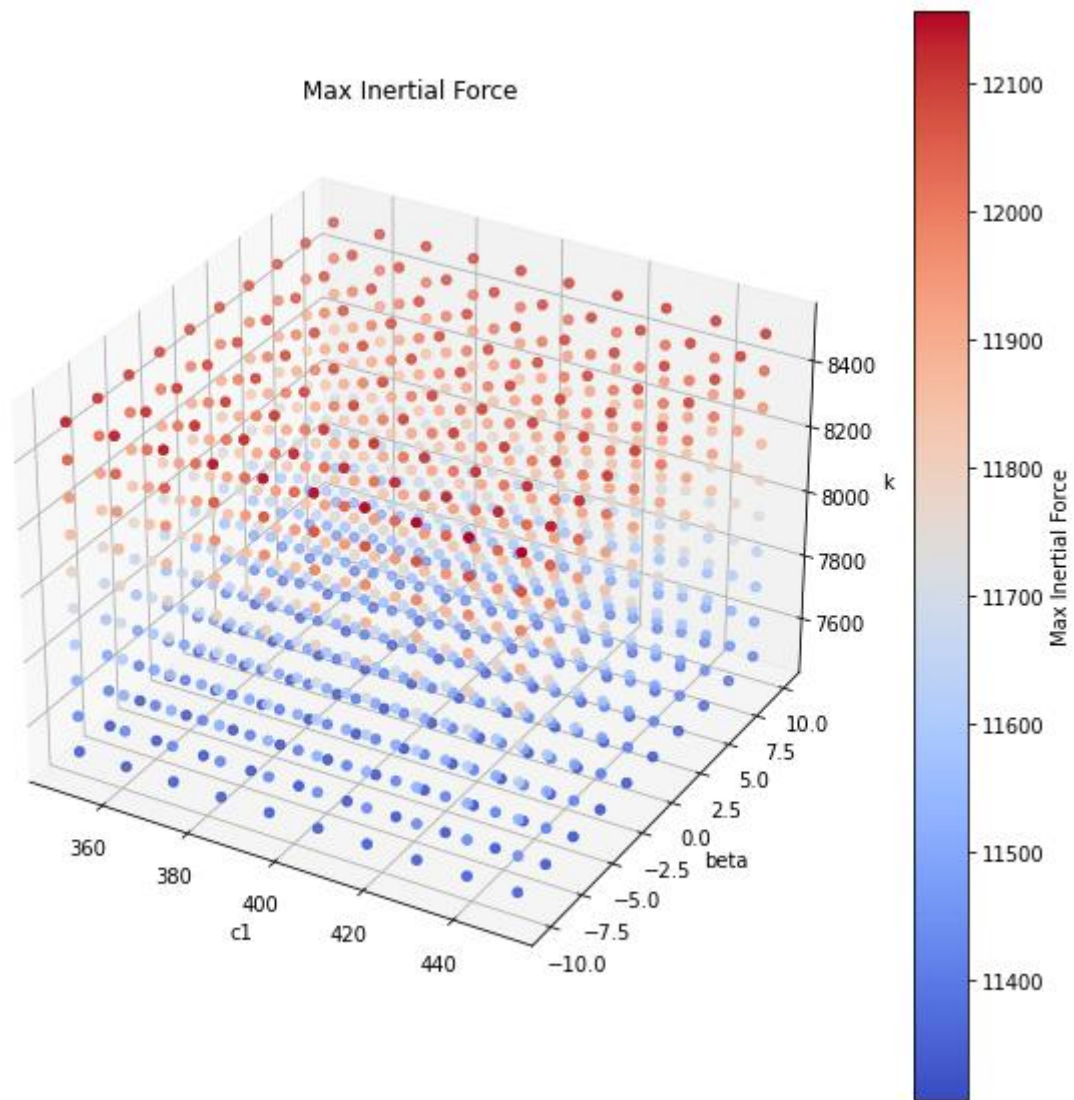


Рис. 11

На цьому графіку представлено вплив параметрів c_1 , k і β на максимальну силу інерції. Як можна спостерігати, максимальна сила зростає зі збільшенням значення параметра β . Цей параметр відповідає за нелінійну складову і вносить свій внесок. Він може мати від'ємне значення – випадок м'якої мотузки, та додатне – випадок жорсткої мотузки. Крім того, значення цього коефіцієнта суттєво залежить від системи та умов.

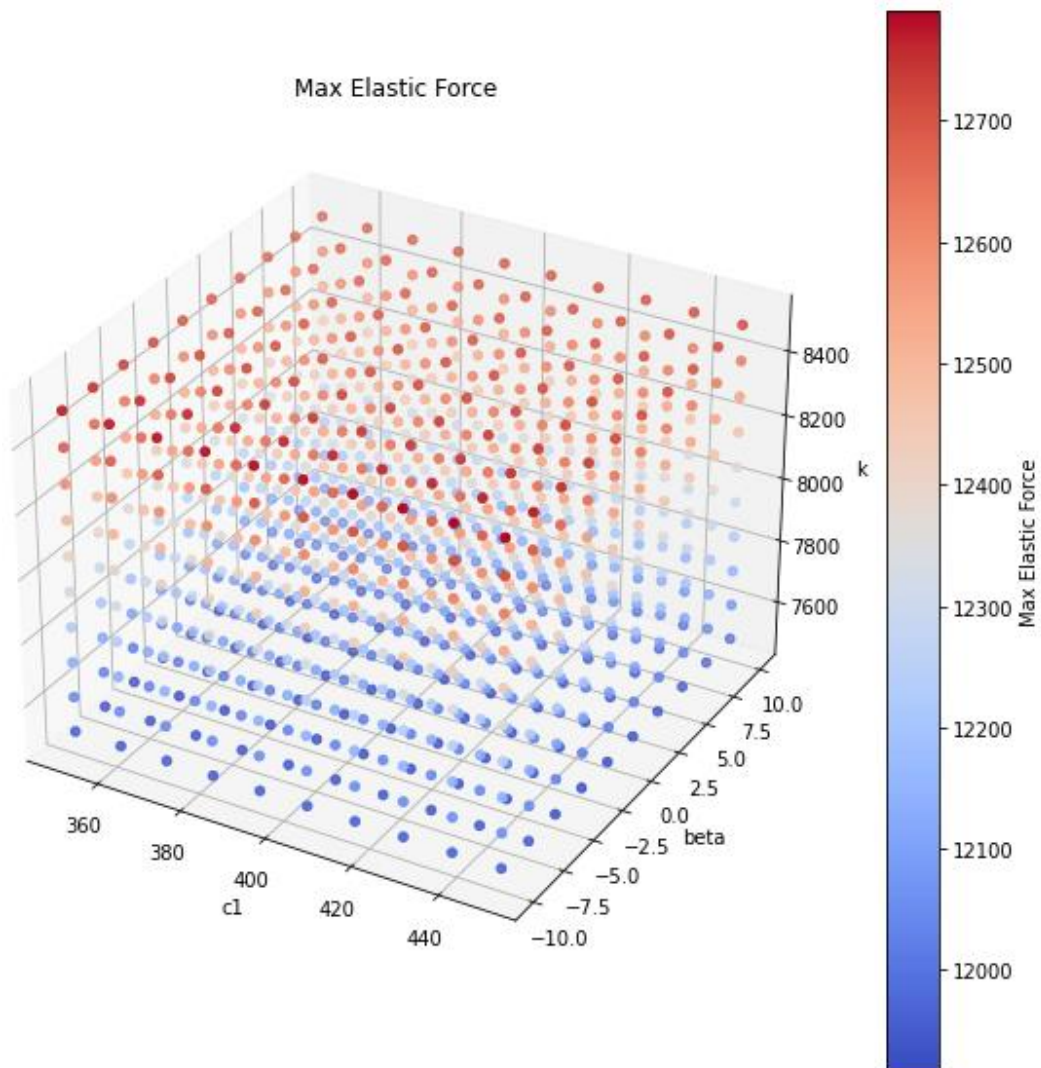


Рис. 12

На даному графіку зображено залежність максимальної пружної сили від параметрів – c_1 , k і β . Ситуація схожа на попередню, але мінімальне значення сили більше ніж на попередньому графіку.

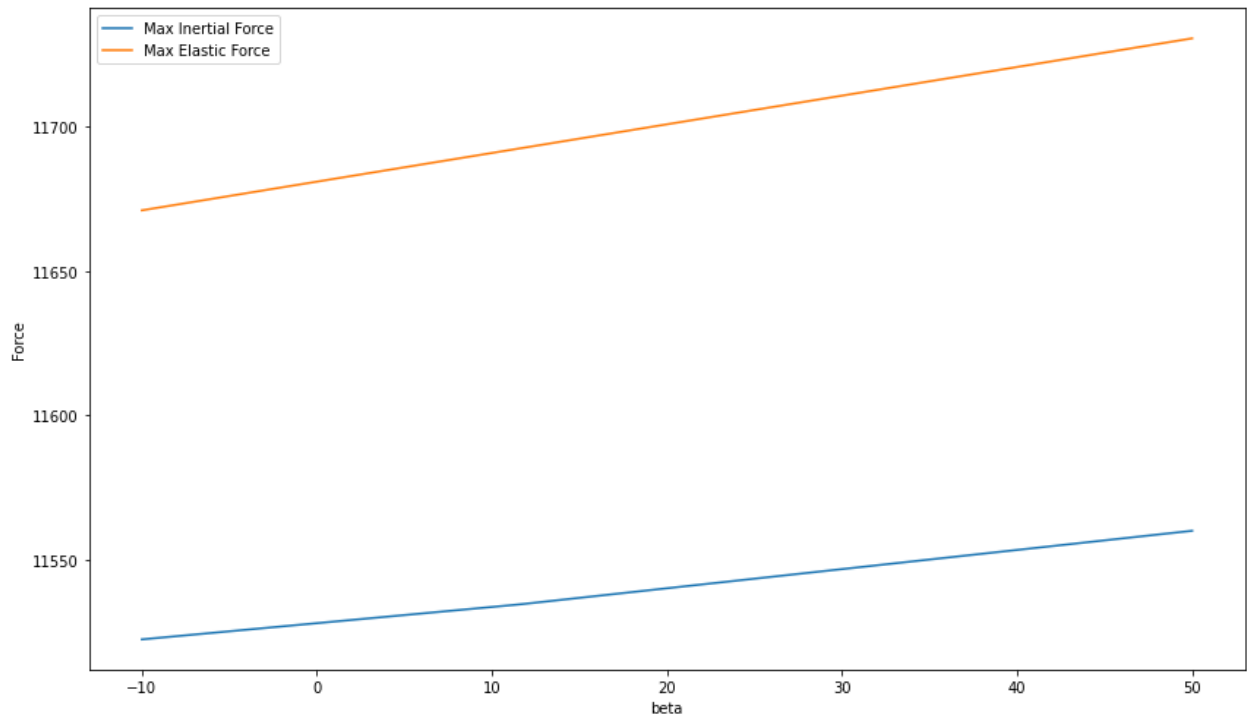


Рис. 13

Графік залежності сил від коефіцієнта β демонструє той факт що зі збільшенням цього коефіцієнту значення максимальної сили в обох випадках тільки зростає, але зростання є доволі повільне.

Отже, можна зробити висновок, що сила опору зменшує силу ривка, але зі збільшенням коефіцієнта опору, який безпосередньо залежить від площі об'єкта та густини повітря, сила опору, що пропорційна квадрату швидкості, різко збільшується та може переважати пружні сили. Коефіцієнт нелінійності також впливає на значення максимальної сили, він збільшує її, але без цієї нелінійної складової рівняння буде неточним.

Висновки

Узагальнюючи отримані результати та роблячи висновки з проведених досліджень, можна зазначити наступне:

1. Вплив сили опору повітря: По-перше, сила опору в нашому випадку пропорційна квадрату швидкості. По-друге, коефіцієнт опору значно залежить від площі міделевого перерізу тіла та густини середовища. У деяких випадках сила опору повітря може переважати пружні сили, особливо якщо тіло має велику площу. Отже, для мінімізації сили ривка за допомогою сили опору необхідно збільшувати площу міделевого перерізу тіла.
2. Роль нелінійності: Коефіцієнт нелінійності важливий для точності моделювання. Відсутність цієї складової може призвести до неточностей у результатах, особливо при великих значеннях сили ривка.
3. Оптимізація параметрів: Дослідження показують, що оптимальні значення параметрів системи (таких як жорсткість, демпфування, та нелінійність) можуть значно впливати на максимальну силу ривка. Оптимізація цих параметрів може призвести до покращення ефективності системи затримки падінь.
4. Важливість експериментів: Для точного розуміння динаміки системи та визначення оптимальних параметрів важливо проводити дослідження та експерименти з урахуванням усіх факторів, що впливають на систему.

Враховуючи ці висновки, можна сформулювати рекомендації для оптимізації параметрів систем у визначених умовах, з метою максимальної ефективності та безпеки. Для подальших досліджень в галузі оптимізації систем можна запропонувати наступні рекомендації:

1. Додаткові елементи в системі: Розглядати систему з введенням додаткових елементів, таких як рухомі або нерухомі блоки. Визначення взаємодії цих елементів з системою затримки падіння може допомогти розширити розуміння та оптимізацію.
2. Системи тривимірного руху: Розглядати системи з тривимірним рухом для більш точного моделювання динаміки падіння. Розширення аналізу на випадок руху вздовж тривимірних траєкторій у просторі може враховувати різноманітні умови та сценарії падіння.
3. Вплив погодних умов: Дослідити вплив різних погодних умов, таких як вітер, на динаміку системи затримки падіння. Врахування зовнішніх факторів може зробити модель більш реалістичною та дозволить визначити оптимальні параметри для різних умов.
4. Аналіз врахування нестабільності: Розглядати вплив різних параметрів на стійкість системи. Дослідження можливостей врахування нестабільності та знаходження оптимальних параметрів для забезпечення стійкості системи.
5. Вплив форми об'єкта: Дослідження впливу форми об'єкта на силу опору повітря. Визначення оптимальної форми об'єкта для мінімізації сил опору та пікової сили падіння.

Ці напрямки досліджень можуть розширити наше розуміння систем затримки падіння та допомогти вдосконалити методи оптимізації у різних умовах та сценаріях.

Список використаних джерел

1. Smith, J., & Strogatz, S. (1992). Chaos and the Duffing oscillator. *American Journal of Physics*, 60(11), 982-986.
2. Guckenheimer, J., & Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag.
3. D. Harutyunyan, G.W. Milton, T.J. Dick and J. Boyer (2016). On ideal dynamic climbing ropes. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part P: Journal of Sports Engineering and Technology*. Volume 231, Issue 2, P: 136 – 143
4. S.W. Attaway, *Rope System Analysis*(1996)
<https://www.lamountaineers.org/pdf/xRopes.pdf>

Додатки

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from scipy.optimize import minimize
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Параметри системи
m = 70.0 # маса
c1 = 400 # коефіцієнт демпфування
k = 8000 # коефіцієнт жорсткості
beta = 10 # коефіцієнт нелінійності
g = 9.81 # прискорення вільного падіння
c2 = 1 # коефіцієнт опору повітря
C = - m*g # константа C

# Початкові умови
x0 = 0.0 # зміщення
h = 30 # висота, з якої падає об'єкт
# швидкість на прикінці падіння, швидкість об'єкта при досягненні висоти h.
v_0 = np.sqrt((m * g + C * np.exp(-(2 * c2 * h) / m)) / c2)
y0 = [x0, v_0]
t_max = 5

# Задання значень x
x_values = np.linspace(0, h, 100)

# Розрахунок значень u для двох різних виразів
u_values1 = np.sqrt(2 * g * x_values)
u_values2 = np.sqrt((m * g + C * np.exp(-2 * c2 * x_values / m)) / c2)

# Побудова графіків
plt.figure(figsize=(8, 6))

plt.plot(x_values, u_values1, label=r'$u = \sqrt{2gx}$')
plt.plot(x_values, u_values2, label=r'$u = \sqrt{\frac{mg(1-e^{-\frac{2c_2x}{m}})}{c_2}}$', linestyle='--')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'$v(x)$')
plt.title(r'Порівняння графіків $v(x)$ для різних виразів')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



```

# Визначення функції, яка представляє систему диференціальних рівнянь
def model(y, t, m, c1, k, beta, g, c2):
    x, x_dot = y
    dxdt = x_dot
    dx2dt2 = (m*g - c1*x_dot - k*x - beta*x**3 - c2*abs(x_dot)*x_dot) / m
    return [dxdt, dx2dt2]

def force (parameters):
    m, c1, k, beta, g, c2 = parameters
    # Часовий інтервал від 0 до t_max секунд, 1000 точок
    t = np.linspace(0, t_max, 1000)
    # Розв'язок системи диференціальних рівнянь
    result = odeint(model, y0, t, args=(m, c1, k, beta, g, c2))
    x, x_dot = result.T
    forces = []
    for i in range(len(t)):
        force = -(c1 * x_dot[i] + k * x[i] + beta * x[i] ** 3 + c2 * abs(x_dot[i])
* x_dot[i] - m*g)
        forces.append(force)
    return forces

def max_force (parameters):
    forces = force_on (parameters)
    return max(np.abs(forces))

def elastic_force(parameters):
    m, c1, k, beta, g, c2 = parameters
    # Часовий інтервал від 0 до t_max секунд, 1000 точок
    t = np.linspace(0, t_max, 1000)
    # Розв'язок системи диференціальних рівнянь
    result = odeint(model, y0, t, args=(m, c1, k, beta, g, c2))
    x, x_dot = result.T
    forces = []
    for i in range(len(t)):
        force = -(c1 * x_dot[i] + k * x[i] + beta * x[i] ** 3)
        forces.append(force)
    return forces

def max_elastic_force(parameters):
    forces = elastic_force(parameters)
    return max(np.abs(forces))

```

```

t = np.linspace(0, t_max, 1000)

x_1, v_1 = odeint(model, y0, t, args=(m, c1, k, beta, g, c2)).T
x_2, v_2 = odeint(model, y0, t, args=(m, c1, k, beta, g, 0)).T

# Максимальна сила
max_force_1 = max_force([m, c1, k, beta, g, c2])
max_e_force_1 = max_elastic_force([m, c1, k, beta, g, c2])

print("Максимальна сила 1:", max_force_1)
print("Максимальна сила 2:", max_e_force_1)

# Побудова графіків

# Графік x(t)
plt.figure(figsize=(12, 7))
plt.plot(t, x_1, label = "З урахуванням сили опору повітря")
plt.plot(t, x_2, label = "Без урахування сили опору повітря")
plt.xlabel('Час t')
plt.ylabel('Положення x')
plt.tight_layout()
plt.legend()
plt.show()

# Графік x_dot(t)
plt.figure(figsize=(12, 7))
plt.plot(t, v_1, label = "З урахуванням сили опору повітря")
plt.plot(t, v_2, label = "Без урахування сили опору повітря")
plt.xlabel('Час t')
plt.ylabel('Швидкість  $\dot{x}(t)$ ')
plt.tight_layout()
plt.legend()
plt.show()

# Фазовий портрет (x проти x_dot)
plt.figure(figsize=(12, 7))
plt.plot(x_1, v_1, label = "З урахуванням сили опору повітря")
plt.plot(x_2, v_2, label = "Без урахування сили опору повітря")
plt.xlabel('Положення x(t)')
plt.ylabel('Швидкість  $\dot{x}$ ')
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

```

```

c1_values = np.linspace(100, 1000, 10) # Діапазон значень c1
c2_values = np.linspace(0.01, 1.5, 10) # Діапазон значень c2
k_values = np.linspace(5000, 10000, 10) # Діапазон значень k
beta_values = np.linspace(1, 50, 10) # Діапазон значень beta

# Масиви для зберігання результатів
max_forces = np.zeros((len(c1_values), len(c2_values), len(k_values)))

# Перебираємо параметри та обчислюємо максимальну силу
for i, c1 in enumerate(c1_values):
    for j, c2 in enumerate(c2_values):
        for k, k_val in enumerate(k_values):
            parameters = (m, c1, k_val, beta, g, c2)
            max_forces[i, j, k] = max_force(parameters)

# Побудова 3D графіка
fig = plt.figure(figsize=(10, 10))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
C1, C2, K = np.meshgrid(c1_values, c2_values, k_values)
# Побудова 3D точок
ax.scatter(C1, C2, K, c=max_forces, cmap='coolwarm')

# Додавання кольорової шкали
cbar = plt.colorbar(ax.scatter(C1, C2, K, c=max_forces, cmap='coolwarm'))
cbar.set_label('Max Force')

ax.set_xlabel('c1')
ax.set_ylabel('c2')
ax.set_zlabel('k')
ax.set_title('Max Force')
plt.show()

# Масиви для зберігання результатів
max_forces = np.zeros((len(c1_values), len(beta_values), len(k_values)))

# Перебираємо параметри та обчислюємо максимальну силу
for i, c1 in enumerate(c1_values):
    for j, beta in enumerate(beta_values):
        for k, k_val in enumerate(k_values):
            parameters = (m, c1, k_val, beta, g, c2)
            max_forces[i, j, k] = max_force(parameters)

# Побудова 3D графіка
fig = plt.figure(figsize=(10, 10))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
C1, BETA, K = np.meshgrid(c1_values, beta_values, k_values)
# Побудова 3D точок
ax.scatter(C1, BETA, K, c=max_forces, cmap='coolwarm')
# Додавання кольорової шкали
cbar = plt.colorbar(ax.scatter(C1, BETA, K, c=max_forces, cmap='coolwarm'))
cbar.set_label('Max Force')
ax.set_xlabel('c1')
ax.set_ylabel('beta')
ax.set_zlabel('k')
ax.set_title('Max Force')
plt.show()

```

```

# Створення сітки значень
C1, K = np.meshgrid(c1_values, k_values)

# Ініціалізація масиву для збереження максимальних сил
max_forces = np.zeros_like(C1)

# Обчислення максимальної сили для кожної комбінації c1 та k
for i in range(len(c1_values)):
    for j in range(len(k_values)):
        parameters = (m, c1_values[i], k_values[j], beta, g, c2)
        max_forces[i, j] = max_force(parameters)

# Побудова графіка
fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(C1, K, max_forces, cmap='viridis')

ax.set_xlabel('$c_1$')
ax.set_ylabel('$k$')
ax.set_zlabel('Максимальна сила')

plt.title('Зміна максимальної сили від параметрів $c_1$ та $k$')
plt.show()

```